Ejercicio 10 de la relación de problemas. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial euclídeo de dimensión 4 con producto escalar es:

$$<A, D> = tr(AD^t)$$

a) Demostrar dos de las propiedades del producto escalar.

b) Calcular la matriz de Gram respecto de la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) ¿Son $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonales?

d) Expresa en función del coseno, el ángulo que forman $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

e) ¿Es B unitaria? En caso negativo, transformarla en una base unitaria.

a) Por ejemplo, la primera propiedad nos dice, que el producto escalar es simétrico, es decir, <A, D> = <D, A>, para cualesquiera A, D matrices en $M_2(\mathbb{R})$: Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ se tiene:

$$<A, D> = tr\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 & a_1c_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1b_2 & c_1c_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

$$<D, A> = tr\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2b_1 & a_2c_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2b_1 & c_2c_1 + d_2d_1 \end{pmatrix} = a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 + d_2d_1$$

Ambas expresiones coinciden.

La cuarta propiedad nos dice que <A, A> ≥ 0, para cualquier A ∈ $M_2(\mathbb{R})$: Sea A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se tiene:

$$<A, A> = tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} a^2+b^2 & \alpha c+bd \\ ca+db & c^2+d^2 \end{pmatrix} = a^2 \; +b^2+c^2+d^2$$

Claramente es mayor o igual a cero pues es suma de cuadrados de números reales

b) La matriz de Gram respecto de la base B = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ será la matriz G cuyos coeficientes a_{ij} viene dado por el producto escalar del elemento i-ésimo de B con el elemento j-ésimo de B, así:

$$a_{11} = <\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$a_{12} = <\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$a_{13} = <\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{14} = <\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$a_{22} = <\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}> tr\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = 3$$

$$a_{23} = <\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

$$a_{24} = <\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0$$

$$G = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$a_{33} = <\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =1$$

$$a_{34} = <\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} =0$$

$$a_{44} = <\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}> = tr\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =1$$

c) Como podemos ver en el apartado anterior el producto escalar de estos dos vectores (a_{12}) es distinto de cero, luego estos dos vectores no son ortogonales.

d) Sabemos que el coseno del ángulo que forman dos vectores viene dado por:

$$\cos(\alpha) = \frac{<\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}>}{\left\|\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\|} = \frac{0}{1.1} = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

e) Una base es unitaria si todos los vectores son unitarios. Esta respuesta la podemos ver directamente en la matriz de Gram, ya que los elementos de la diagonal principal son los módulos de los vectores al cuadrado.

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver los dos último vectores son unitarios, pero los dos primeros no, así que para obtener una base unitaria, dividimos entre el módulo:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$